Printed Pages – 8

केन्द्र क्र. 125

NJ-1309

B.Sc. (Part-II) Examination, Mar.-Apr., 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Calculus)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks.

इकाई–I / Unit–I

Q. 1. (a) दर्शाइए कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots\right\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है।

Show that the sequence $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots\right\}$ is a convergent sequence.

(b) श्रेणी $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots\ldots,$

$x>0$ के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए।

Test convergence or divergence of the series

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots\ldots,\ x>0$$

अथवा / OR

(a) श्रेणी $x+\frac{2^2x^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3x^5}{\lfloor 3}+\frac{4^4x^7}{\lfloor 4}+\ldots\ldots,\ x>0$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए।

Test the convergence of the series :

$$x+\frac{2^2x^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3x^5}{\lfloor 3}+\frac{4^4x^7}{\lfloor 4}+\ldots\ldots,\ x>0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\Sigma(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ प्रतिबंधी अभिसारी है।

Prove that the series $\Sigma(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ is conditionally convergent.

इकाई–II / Unit–II

Q. 2. (a) परिबद्धता प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove boundeness theorem.

(b) फलन $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

के बिंदु x = 0 पर सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

Examine continuity and differentiability of the function $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

at the piont x = 0.

अथवा / OR

(a) यदि $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(\theta x)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x\to 1$, $f(x) = 1 + (1-x)^{5/2}$

If $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(\theta x)$, then find value of θ when $x\to 1$, $f(x) = 1 + (1-x)^{5/2}$

(b) यदि f और g क्रमशः g(x) और x पर अवकलनीय हैं, तब fog भी x पर अवकलनीय है तथा

$(fog)'(x) = f'[g(x)].g'(x)$

If f and g are differentiable at g(x) and x respectively, then fog is also differentiable at x and $(fog)'(x) = f'[g(x)].g'(x)$.

इकाई–III / Unit–III

Q. 3. (a) ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

Determine :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

(b) यदि $x^x y^y z^z = c$, तो दर्शाइए कि $x = y = z$ पर

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -(x\log ex)^{-1}$$

If $x^x y^y z^z = c$, then show that at $x = y = z$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -(x\log ex)^{-1}$$

अथवा / OR

(a) यदि $z = f(u, v)$, $u = x^2 - 2xy - y^2$, $v = y$ तो दर्शाइए कि :

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ के तुल्य है।

If $z = f(u, v)$, $u = x^2 - 2xy - y^2$, $v = y$ then show that :

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

is equivalent to $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

(b) यदि $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\sin\theta$$

If $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, then show that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\sin\theta$$

इकाई–IV / Unit–IV

Q. 4. (a) सरल रेखाओं $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि $a^m b^n = c^{m+n}$ जहाँ c एक अचर है।

Find equation of envelope of straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ when $a^m b^n = c^{m+n}$ where c is a constant.

(b) u के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए जहाँ :

$u = \sin x \sin y \sin (x + y)$

Discuss maxima or minima of u, where

$u = \sin x \sin y \sin (x + y)$

अथवा / OR

(a) दर्शाइए कि एक चक्रज का केंद्रज एक अन्य चक्रज होता है।

Show that evolute of a cycloid is any other cycloid.

(b) यदि $x + y + z = a$ हो, तो $x^m y^n z^p$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

If $x + y + z = a$, then find maximum value of $x^m y^n z^p$.

इकाई–V / Unit–V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \cdot \Gamma n}{\Gamma(m+n)} (m,n > 0)$$

Prove that :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \cdot \Gamma n}{\Gamma(m+n)} (m,n > 0)$$

(b) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$$

अथवा / OR

(a) मूल्यांकन कीजिए $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ जहाँ समाकलन क्षेत्र V एक बेलन है जो निम्न पृष्ठों से परिबद्ध है :

$z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$

Evaluate $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ where integration region V is a cylinder which is bounded by following surfaces $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$

(b) समाकलन $\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x,y)\,dx\,dy$ का क्रम बदलिए।

Change the order of integration

$$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x,y)\,dx\,dy$$